Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια **2**

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

28 - 3 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων.

Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 2

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

28 - 3 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων.

Λύση. *Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 2$ πολλαπλότητας ένα. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από τις εξισώσεις $-3y + 3z = 0$ και $-2y + 2z = 0$ έπεται ότι $y = z$. Επομένως

$$\mathcal{V}(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\} = \{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(1,0,0), (0,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$ αποτελεί μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(2)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\begin{cases} -x - 3y + 3z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \implies y = \frac{2}{3}z \implies x = 3z - 3\frac{2}{3}z = z$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\mathcal{V}(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = \frac{2}{3}x, z = x\} = \{(x, \frac{2}{3}x, x) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, \frac{2}{3}, 1) \rangle = \langle (3,2,3) \rangle$$

Άρα μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(2)$ είναι το σύνολο $\{(3,2,3)\}$. $\square$